汕头大学 2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学．应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上．答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答．答题要写清题号．不必抄原题．

一．（20 分）（1）设$f(x)$是一个实系数多项式，a,b是两个不同的实数．证明：用$(x-a)(x-b)$除$f(x)$的余式为$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

(2) 设$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$是二次整系数多项式(即a_0,a_1,a_2为整数)，$\sqrt{2}+1$是$f(x)$的一个根．证明：$1-\sqrt{2}$也是$f(x)$的一个根．

(3) 设$g(x)$是一个n次实系数多项式，且$1+\sqrt{-1}$是$g(x)$的一个根．问$1-\sqrt{-1}$是否为$g(x)$的一个根？证明你的结论．

二．（15 分）(1) 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一个反对称矩阵，即满足$a_{ij}=-a_{ji}$，证明当n为奇数时，A的行列式为 0.

（2）求矩阵$T_n=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$的行列式，其中$T_n$为三对角矩阵，空格处为零．

三．（15 分）设n阶非零方阵A是幂零阵，即存在正整数m，使得$A^m=0$.

(1) 证明$A-I$为可逆矩阵并求其逆阵．

(2) 讨论A能否相似于对角阵．

四．(15 分) (1) 设A为$m\times n$实矩阵，证明：A^TA为正定矩阵的充分必要条件是A的秩为n.

(2) 设B是n阶实正定矩阵，证明：$B+B^{-1}-I$是正定矩阵．

五．（15 分）(1) 设$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^k,k\geq 0$.

(2)设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}16&15&14&13\\12&11&10&9\\8&7&6&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}$. 求一个 4×4 置换矩阵 S (即 S 由单位矩阵经过若干次行交换得到)，使得 $S^TAS=B$.

六. (20 分) (1) 设λ是参数，讨论下列方程组的解的情况(不必求出方程组的解)：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

(2) 设m,n是正整数，$b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_m,d_1,\ldots,d_n$是非零实数，$\sum_{i=1}^m b_ic_i=0$.

设$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_m\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}c_1d_1&c_1d_2&\ldots&c_1d_n\\c_2d_1&c_2d_2&\ldots&c_2d_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_md_1&c_md_2&\ldots&c_md_n\end{pmatrix}$. 讨论方程组$Ax=b$的解的情况.

七. (15 分) 设 A,B 是 n 阶方阵，A 有 n 个不同的特征值且 $AB=BA$. 证明：B 相似于对角阵.

八. (20 分) 设$u=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$.

(1) 计算$H=I_4-2uu^T$及H^2，其中I_4是 4 阶单位矩阵.

(2) 计算H的行列式.

(3) 求正交矩阵Q和对角矩阵D使得$Q^THQ=D$.

(4) 判断二次型$x^THx\ (x\in\mathbb{R}^4)$的类型(即正定、负定、半正定、半负定或不定).

九. (15 分) 设V是一个n维欧几里得空间.

(1) 叙述V上的线性变换的定义.

(2) 设V上的变换$\mathcal{A}$满足

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta),\quad \alpha,\beta\in V.$$

证明：$\mathcal{A}$是线性变换.