汕头大学 2016 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一、（15 分） 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right\}$。

二、（15 分）求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}$ $(a>0, b>0, c>0)$。

三、（15 分） 设 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{a_n^2}{3}$，（1）证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在；

（2）求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$。

四、（15 分） 设 $f(x,y,z)$ 连续，求

$$\lim_{r\to+0}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2,\sqrt{x^2+y^2+z^2},\sin(x^2+y^2+z^2))dxdydz}{r^3},$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le r^2\}$。

五、（15 分） 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$。问 α 为何种情况时，$f(x)$ 在原点处连续？

六、(15 分) 证明：当 $x\in[0,+\infty)$ 时有 $\ln(1+x)\ge\dfrac{1}{c}\ln(1+cx)$，其中 c 是大于1的常数。

七、（15 分） 求和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{2^n n}$。

八、（10 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4}{x^6}$。

九、（10 分） 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，又设曲线积分

$$I=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{xy}{1+x^2}dx+f(x)dy$$

与积分路径无关，试求函数 $f(x)$。

十、（10 分）证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $(0<a<b)$，则存在

$c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{c}=f'(c)\ln\dfrac{b}{a}$。

十一、（5 分） 设 D 为平面上的有界域，$f(x,y)$ 在 D 上可微，在 $\overline{D}$ 上连续，

在 $\overline{D}$ 的边界上 $f(x,y)=0$，且在 D 上满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$，试证明在

$\overline{D}$ 上

$$f(x,y)\equiv 0。$$

十二、（5 分） 求积分

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\cos x + x\sin^2 x+1}{1+\cos x}dx。$$

十三、（5 分） 已知 $f(x,y)$ 连续，令 $L=\left\{(x,y):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$，

$$M=\max_{(x,y)\in L}\{f(x,y)\}，\quad m=\min_{(x,y)\in L}\{f(x,y)\}。$$

证明：(1) $f(x,y)$ 在 L 上能取到 M 和 m。(2) 当 $m\neq M$ 时，$f(x,y)$ 能在 L 上取到 m 与 M 之间的任意值至少两次。