汕头大学 2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学．应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上．答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答．答题要写清题号．不必抄原题．

一．（20 分）（1）叙述重因式的概念。

（2）判断下列多项式是否有重因式：$f(x)=x^4-4x^3+7x^2-12x+12$。

（3）分别在实数域和复数域上分解（2）中的多项式。

（4）设 m,n,p 为正整数，证明：x^2+x+1整除$x^{3m+2}+x^{3n+1}+x^{3p}$。

二．（20 分）设 n 是正整数，$a_1,a_2,\ldots,a_n$和$b_1,b_2,\ldots,b_n$是两组不全为零的实数，

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}。$$

(1) 求 A 的秩。(2) 求 A 的特征值。(3) 求 A 相似于对角阵的条件。（4）设$n=4$，$a_1=1,a_2=2,a_3=0,a_4=3$，$b_1=2,b_2=-2,b_3=3,b_4=1$，求线性方程组$A\mathbf{x}=0$的解集W，指出W是否为$\mathbb{R}^4$的线性子空间，若是，求出W的一组基。

三．（20 分）设有 n 阶实数方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。(1)给出 A 为正交阵的定义。(2)给出两个 2 阶非单位矩阵的正交阵的例子，其中之一对应镜像变换，另一个对应旋转变换。(3)说明正交阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值和行列式的特点，并加以证明。

四．（20 分）(1)设某二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&3&1\\3&1&1\end{pmatrix}$，将它化为标准型。(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$，求 $A^k,k\geq 0$。

五．（20 分）（1）设$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$是 n 维欧几里得空间 V的一组向量，定义它们的 Gram 矩阵为

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_s,\alpha_1) & (\alpha_s,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_s,\alpha_s)\end{pmatrix},$$

其中(α,β)表示α与β的内积。证明：$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$是正定矩阵或半正定矩阵，并给出$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$为正定矩阵的条件。

（2）设$A_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \alpha & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & \alpha\end{pmatrix}_n$，讨论二次型$q_\alpha(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA_\alpha\mathbf{x}$的类型，即讨论当$\alpha$取不同的值时，$q_\alpha(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA_\alpha\mathbf{x}$属于正定，负定，半正定，半负定还是不定。

六.（15 分） 设n阶实数方阵A,B，证明： $(AB)^*=B^*A^*$，其中X^*表示n阶实数方阵X的伴随矩阵。

七.（20 分）（1）证明$\begin{vmatrix}-1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1\\ & & & & 1 & -2\end{vmatrix}_n=(-1)^n$；

（2）计算$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$。

八.(15 分) 设A,B是n阶方阵。(1)证明:若A与B相似,则对任意常数c，cI_n-A与cI_n-B等价。(2)若对任意常数c，cI_n-A与cI_n-B等价，举例说明A与B不一定相似。